第 1 問

(ア)

衝突直前の小球 A の速さを v_0 とすると，

小球 A についての力学的エネルギー保存則より， $m_A gh = \frac{1}{2} m_A {v_0}^2$

$\therefore v_0 = \sqrt{2gh}$

(イ)・(ウ)

ことわり：右向きを正とする。

小球 A に作用する外力と小球 B に作用する外力は作用反作用の関係，
すなわち打ち消し合う関係にあるから，
小球 A と小球 B からなる系に作用する外力は 0 である。
よって，衝突直前と直後の運動量は保存される。

衝突直前の小球 A の速度

衝突直前の小球 A の速さは $\sqrt{2gh}$ で，向きが正だから，その速度は $\sqrt{2gh}$

衝突直前と直後の運動量保存則の式

衝突直後の小球 A，小球 B の速度をそれぞれ $\vec{v}_A$， $\vec{v}_B$ とすると，

$m_A \sqrt{2gh} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$ ・・・①

弾性衝突の式

反発係数を e とすると， $\dfrac{\text{衝突直後の相対速度}}{\text{衝突直前の相対速度}} = -e$ （$0 \leq e \leq 1$ 弾性衝突の場合 $e = 1$）

より， $\dfrac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{\sqrt{2gh} - 0} = -1$ $\therefore -\sqrt{2gh} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$ ・・・②

①＋②× m_B より，

$(m_A - m_B)\sqrt{2gh} = (m_A + m_B)\vec{v}_A$ $\therefore \vec{v}_A = \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\sqrt{2gh}$ ・・・③

よって， $v_A = |\vec{v}_A| = \dfrac{|m_A - m_B|}{m_A + m_B}\sqrt{2gh}$ ・・・答（イ）

これと②，③より， $\vec{v}_B = \dfrac{2m_A}{m_A + m_B}\sqrt{2gh} > 0$

よって， $v_B = \dfrac{2m_A}{m_A + m_B}\sqrt{2gh}$ ・・・答（ウ）

補足

撃力

衝撃力ともいい，短時間（Δt）作用する大きな力（$\vec{F}$）のこと。

また，その効果は力積（$\vec{F}\Delta t$）によって表す。

これは 2 つの物体が衝突するような場合に問題になるもので，

作用する時間は短いが，その効果は大きい。

したがって，たとえば，鉛直方向に運動中の 2 物体衝突の場合，

2 物体に作用する外力の和をとると，2 物体に作用する重力の和となり 0 ではないが，

撃力の効果（力積）が非常に大きいため重力の効果を無視してよい。

よって，重力の影響のせいで外力の和が 0 とならない鉛直方向の衝突であっても，

衝突直前と直後の運動量は保存される。

(エ)

$\vec{v}_{\mathrm{A}} = \dfrac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\sqrt{2gh} < 0$ より，$m_{\mathrm{A}} < m_{\mathrm{B}}$　・・・(答)

(オ)

小球 A についての力学的エネルギー保存則より，$m_{\mathrm{A}} g h' = \dfrac{1}{2} m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}}{}^2$

よって，$h' = \dfrac{v_{\mathrm{A}}{}^2}{2g} = \dfrac{\left(\dfrac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\right)^2 \cdot 2gh}{2g} = \left(\dfrac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\right)^2 h$　・・・(答)

別解

小球 A についての力学的エネルギー保存則より，$m_{\mathrm{A}} g h' = \dfrac{1}{2} m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}}{}^2$　・・・④

(ア) より，$m_{\mathrm{A}} g h = \dfrac{1}{2} m_{\mathrm{A}} v_0{}^2$　・・・⑤

$\dfrac{④}{⑤}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \frac{v_{\mathrm{A}}{}^2}{v_0{}^2} = \frac{\left(\dfrac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\right)^2 \cdot 2gh}{2gh} = \left(\frac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\right)^2$$

$\therefore h' = \left(\dfrac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\right)^2 h$　・・・(答)

別解の方が最高点の高さと速さの関係がわかりやすい。

（カ）・（キ）

小球 A の運動は単振り子の微小振動とみなせるから，

その周期を T とすると，$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ である。

小球 A が衝突後初めて点 O に戻るまでの時間を t とすると，

t は周期 T の $\dfrac{1}{2}$ だから，$t = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ・・・答（キ）

この間，B は壁と弾性衝突した後点 O に戻ってくる。

つまり，速さ $v_{\mathrm{B}} = \dfrac{2m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\sqrt{2gh}$ で距離 $2L$ 進むことになる。

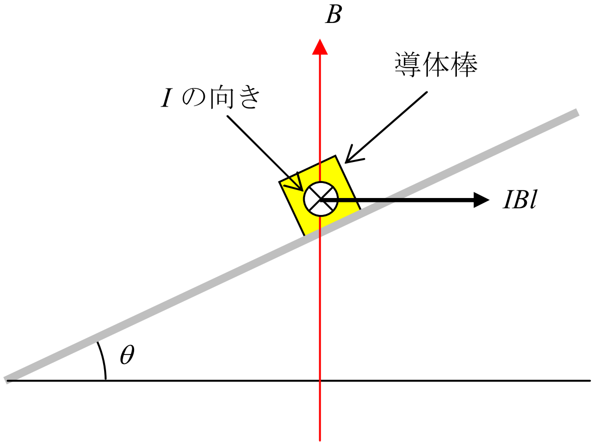
よって，$v_{\mathrm{B}}t = 2L$ より，$\dfrac{2m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\sqrt{2gh} \cdot \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 2L$

$\therefore L = \dfrac{\pi m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\sqrt{2hl}$ ・・・答（カ）

第 2 問

(1)

IBl ・・・（答）



(2)

$IBl = 0.2[\mathrm{T}] \times 0.5[\mathrm{A}] \times 0.3[\mathrm{m}] = 0.03\,[\mathrm{N}]$ ・・・（答）

補足：単位について

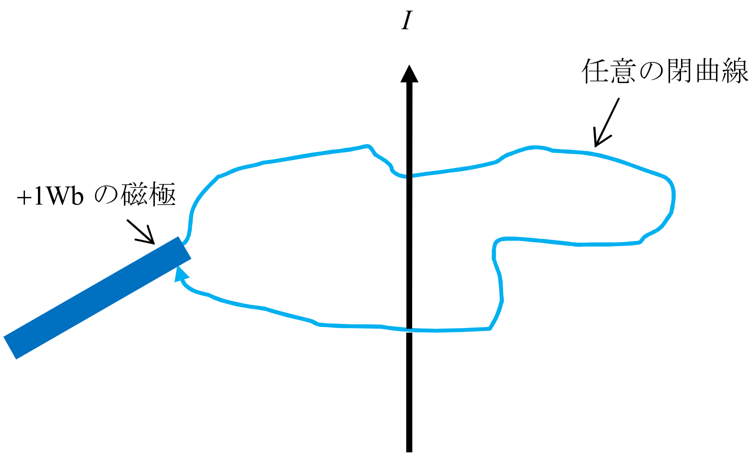
$\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}$ より，$\mathrm{T} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{m} = \dfrac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{m} = \dfrac{\mathrm{Wb} \cdot \mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}} = \dfrac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{m}} = \mathrm{N}$

アンペールの法則

I [A]の電流の周りの任意の閉曲線に沿って +1 Wb の磁極を 1 周するとき，磁界のする仕事は I [J]である。

より，

$\mathrm{Wb} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$



(3)

(1)の図より，

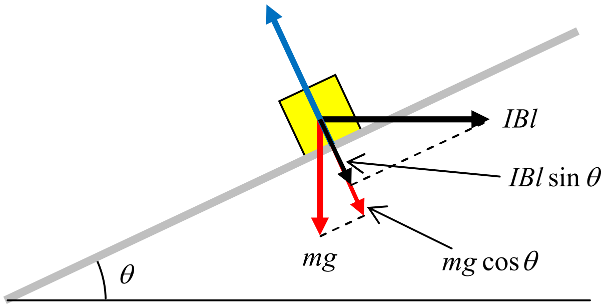
のぼる方向　・・・(答)

(4)

導体棒に働く垂直抗力を N とすると，

導体棒に働く面に垂直な方向の力のつり合いより，

$N = mg\cos\theta + IBl\sin\theta$　・・・(答)



(5)

すべりだす直前，導体棒に最大摩擦力が働き，

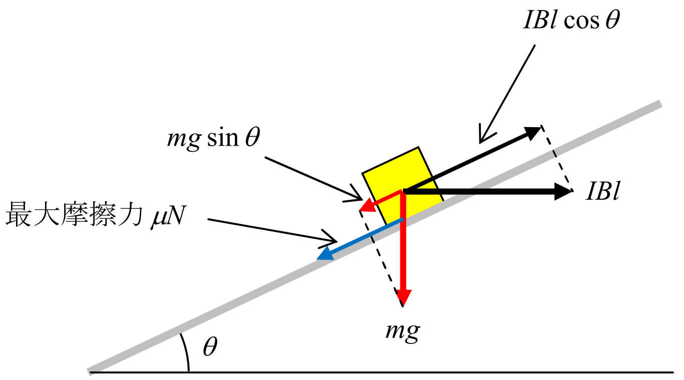
導体棒に働く斜面に平行な方向の力がつり合うから，

$IBl\cos\theta = mg\sin\theta + \mu N$

$N = mg\cos\theta + IBl\sin\theta$ より，

$IBl\cos\theta = mg\sin\theta + \mu(mg\cos\theta + IBl\sin\theta)$

$\therefore I = \dfrac{mg(\mu\cos\theta + \sin\theta)}{Bl(\cos\theta - \mu\sin\theta)}$　・・・(答)



第 3 問

熱力学問題を要領よく解くためのコツ

・気体の状態量を，たとえば(P,V,n,T)のように成分表示する。

定性的に考える手間が軽減される。

気体の状態をメモすることにもなり，状態変化の過程を追いやすい。

・$PV=nRT$ から導かれる比例式$\dfrac{PV}{nT}=$一定 または$\dfrac{nT}{PV}=$一定 を活用する。

これは化学の「気体の法則と性質」についてもいえる。

・定圧（等圧）変化，定積（等積）変化，等温変化，断熱変化を見極め，
それぞれの状態変化についての熱力学第一法則の式を立てる。

・熱力学第一法則の式が立てやすくなるように系の範囲を設定する。

(1)

状態 A の圧力を p_{A} とすると，ピストンに働く力のつり合いより， $p_{\mathrm{A}}S=p_sS+mg$

$$\therefore p_{\mathrm{A}}=p_s+\frac{mg}{S}$$ ・・・(答)

(2)

状態 A の内部エネルギーをU_{A}，気体の物質量をnとすると，

単原子分子の理想気体の定積モル比熱は$\dfrac{3}{2}R$ だから，

$$U_{\mathrm{A}}=\frac{3}{2}nRT_0$$

理想気体の状態方程式より， $nRT_0=\left(p_s+\dfrac{mg}{S}\right)Sl_0$

よって，

$$U_{\mathrm{A}}=\frac{3}{2}(p_sS+mg)l_0$$ ・・・(答)

(3)

状態 B の圧力を p_{B} とすると，ピストンに働く力のつり合いより， $p_{\mathrm{B}}S=p_sS+mg+k\Delta l$

$$\therefore p_{\mathrm{B}}=p_s+\frac{mg+k\Delta l}{S}$$ ・・・(答)

(4)

状態量を（圧力，体積，温度）で表すと，

状態 A$\left(p_s+\dfrac{mg}{S}, Sl_0, T_0\right)$

状態 B の温度を T_{B} とすると，

状態 B$\left(p_s+\dfrac{mg+k\Delta l}{S}, S(l_0+\Delta l), T_{\mathrm{B}}\right)$

$\dfrac{T}{PV}=$一定 より，$\dfrac{T_{\mathrm{B}}}{\left(p_s+\dfrac{mg+k\Delta l}{S}\right)\cdot S(l_0+\Delta l)}=\dfrac{T_0}{\left(p_s+\dfrac{mg}{S}\right)\cdot Sl_0}$

$$\therefore T_{\mathrm{B}}=\frac{(p_sS+mg+k\Delta l)(l_0+\Delta l)}{(p_sS+mg)l_0}T_0$$

よって，$\dfrac{(p_sS+mg+k\Delta l)(l_0+\Delta l)}{(p_sS+mg)l_0}$倍 ・・・(答)

(5)

状態 A からピストンが Δx 上昇したときの状態を X とすると，

状態 B$\left(p_s+\dfrac{mg+k\Delta l}{S}, S(l_0+\Delta l)\right)$より，

状態 X$\left(p_s+\dfrac{mg+k\Delta x}{S}, S(l_0+\Delta x)\right)$ $(0\leq \Delta x\leq \Delta l_0)$

状態 X の体積を V とすると，$V=S(l_0+\Delta x)$ $\therefore \Delta x=\dfrac{V}{S}-l_0$ ・・・①

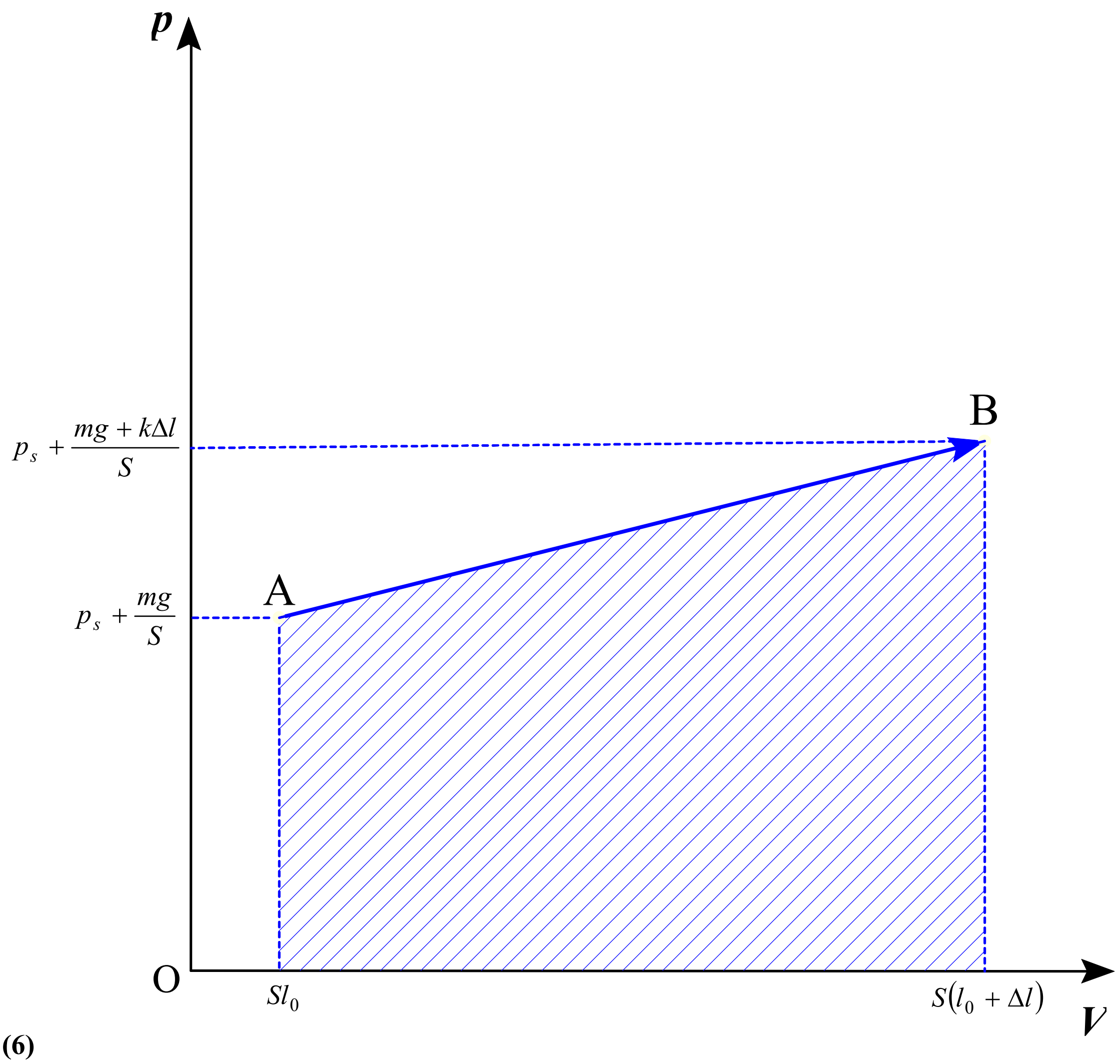
状態 X の圧力を p とすると，$p=p_s+\dfrac{mg+k\Delta x}{S}$ ・・・②

①を②に代入すると，

$$\begin{aligned}p&=p_s+\frac{mg+k\Delta x}{S}\\&=p_s+\frac{mg}{S}+\frac{k}{S}\left(\frac{V}{S}-l_0\right)\\&=p_s+\frac{mg-kl_0}{S}+\frac{k}{S^2}V\end{aligned}$$

よって，

$$p=p_s+\frac{mg-kl_0}{S}+\frac{k}{S^2}V \quad (Sl_0\leq V\leq S(l_0+\Delta l))$$



(6)

仕事をW_{AB}とすると，

台形の面積公式より，

$$W_{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\left\{\left(p_s+\frac{mg}{S}\right)+\left(p_s+\frac{mg+k\Delta l}{S}\right)\right\}\left\{S\left(l_0+\Delta l\right)-Sl_0\right\}$$

$$=\left(p_sS+mg+\frac{1}{2}k\Delta l\right)\Delta l \quad \cdot\cdot\cdot (答)$$

(7)

内部エネルギー変化をΔU_{AB}とすると，

$$\Delta U_{\mathrm{AB}} = \frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{B}} - T_0)$$

$$= \frac{3}{2}(nRT_{\mathrm{B}} - nRT_0)$$

$$= \frac{3}{2}\left\{\left(p_s + \frac{mg + k\Delta l}{S}\right)\cdot S(l_0 + \Delta l) - \left(p_s + \frac{mg}{S}\right)Sl_0\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\{(p_sS + mg + k\Delta l)(l_0 + \Delta l) - (p_sS + mg)l_0\}$$

$$= \frac{3}{2}[\{(p_sS + mg) + k\Delta l\}(l_0 + \Delta l) - (p_sS + mg)l_0]$$

$$= \frac{3}{2}\{p_sS + mg + k(l_0 + \Delta l)\}\Delta l$$

$$W_{\mathrm{AB}} = \left(p_sS + mg + \frac{1}{2}k\Delta l\right)\Delta l$$

気体が吸収した熱量をQとすると，

熱力学第一法則の式より，

$$Q = \Delta U_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{AB}}$$

$$= \frac{3}{2}\{p_sS + mg + k(l_0 + \Delta l)\}\Delta l + \left(p_sS + mg + \frac{1}{2}k\Delta l\right)\Delta l$$

$$= \frac{1}{2}\{5(p_sS + mg) + k(3l_0 + 4\Delta l)\}\Delta l \quad \cdots(\text{答})$$

第 4 問

(1)

$v_A = \dfrac{\lambda_A}{T}$ より，$\lambda_A = v_A T$ ・・・(答)

(2)

$XY \sin\alpha = \lambda_A$，$\lambda_A = v_A T$ より，

$XY = \dfrac{v_A T}{\sin\alpha}$ ・・・(答)

(3)

波の振動数は変わらないから，屈折波の周期は T のままである。

よって，$\lambda_B = v_B T$

これと $XY \sin\beta = \lambda_B$ より，

$XY \sin\beta = v_B T$

よって，$\dfrac{XY \sin\alpha}{XY \sin\beta} = \dfrac{v_A T}{v_B T}$

$\therefore \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v_A}{v_B}$ ・・・(答)

(4)

$\dfrac{\sin\alpha_0}{\sin 90^\circ} = \dfrac{v_A}{v_B}$ より，$\sin\alpha_0 = \dfrac{v_A}{v_B}$ ・・・(答)

(5)

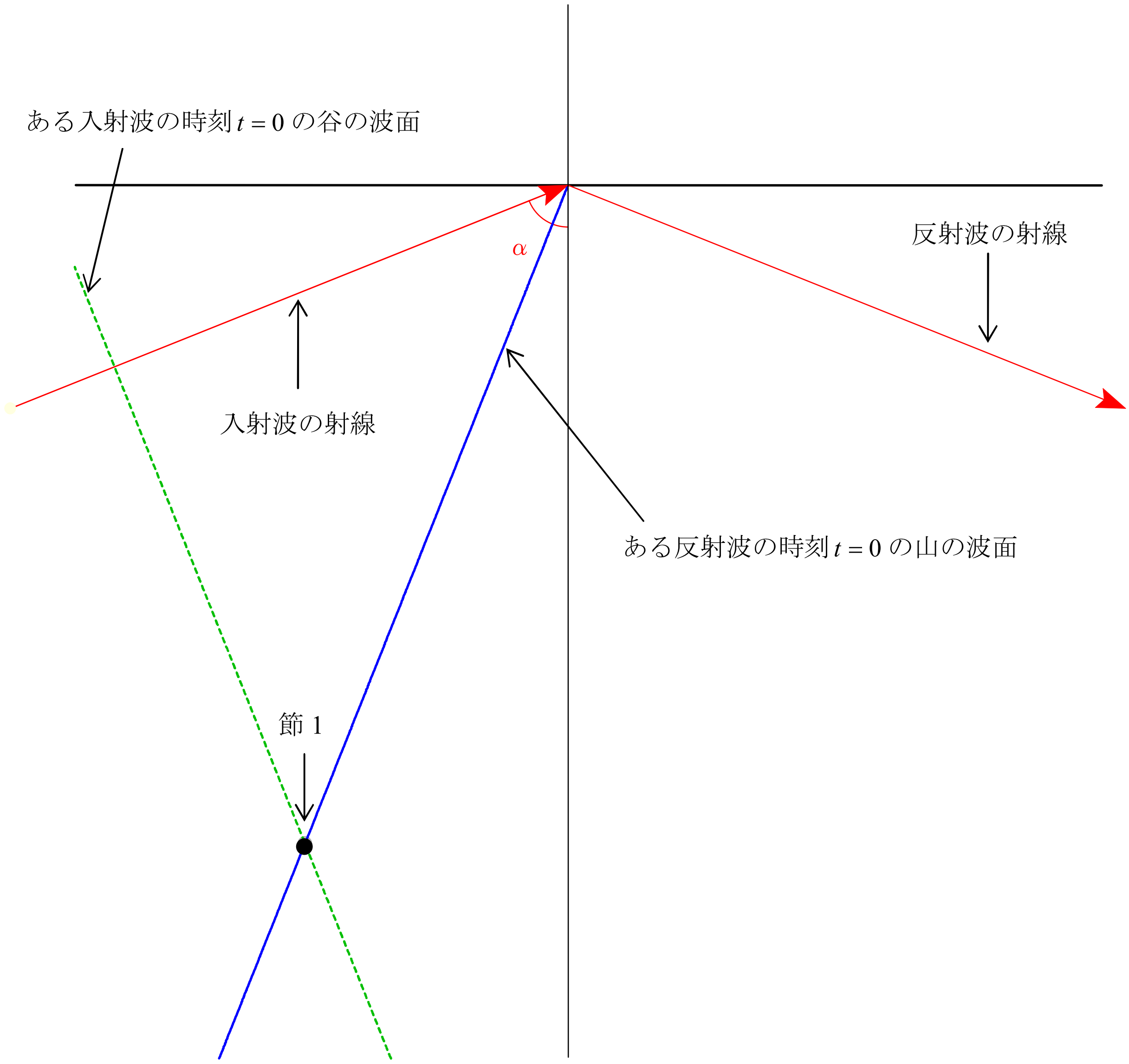
$a + a = 2a$ ・・・(答)

(6)

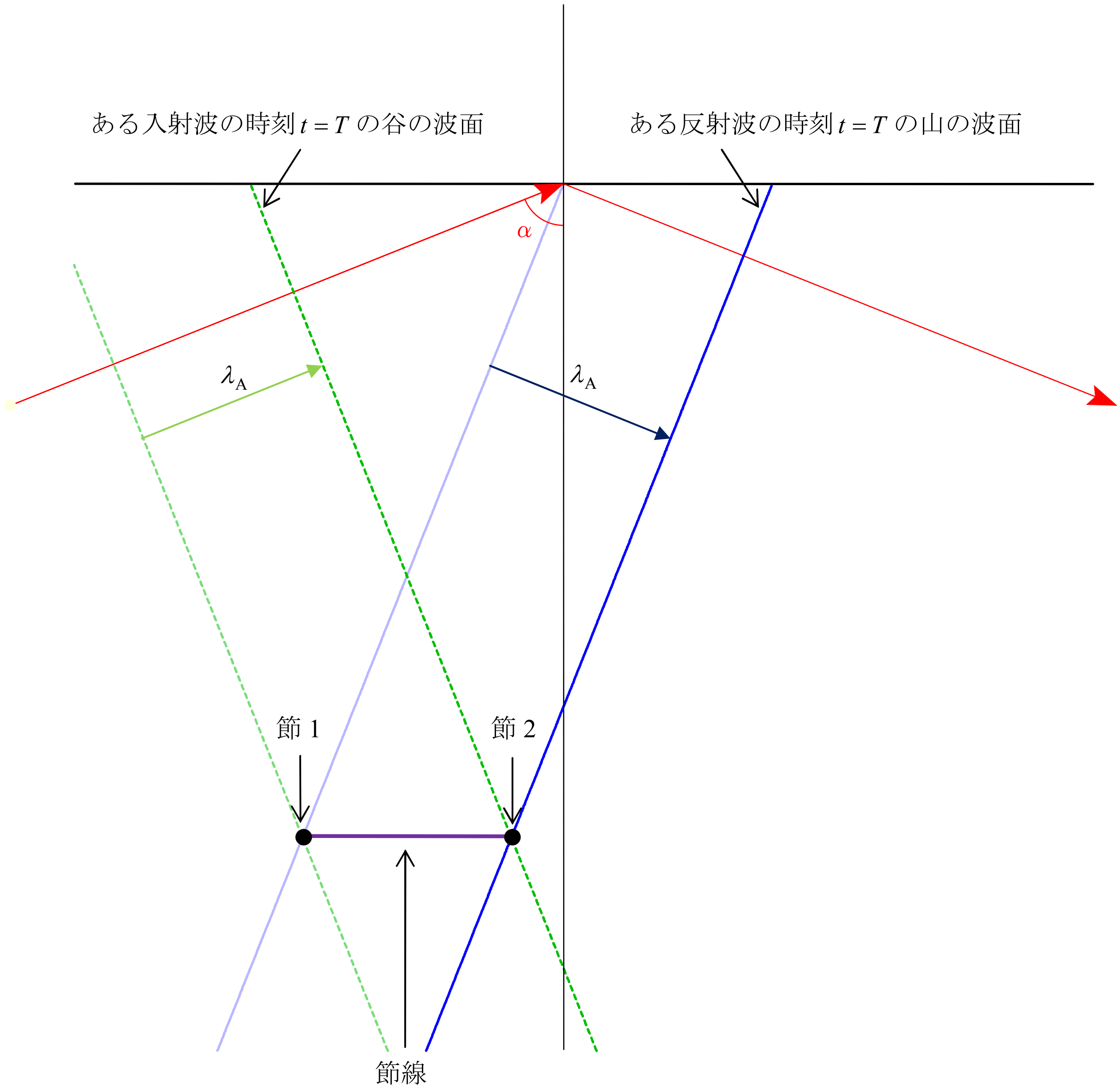
任意の入射波の波面と反射波の波面の干渉を経時的に見ていく。

時刻 $t=0$ のとき,

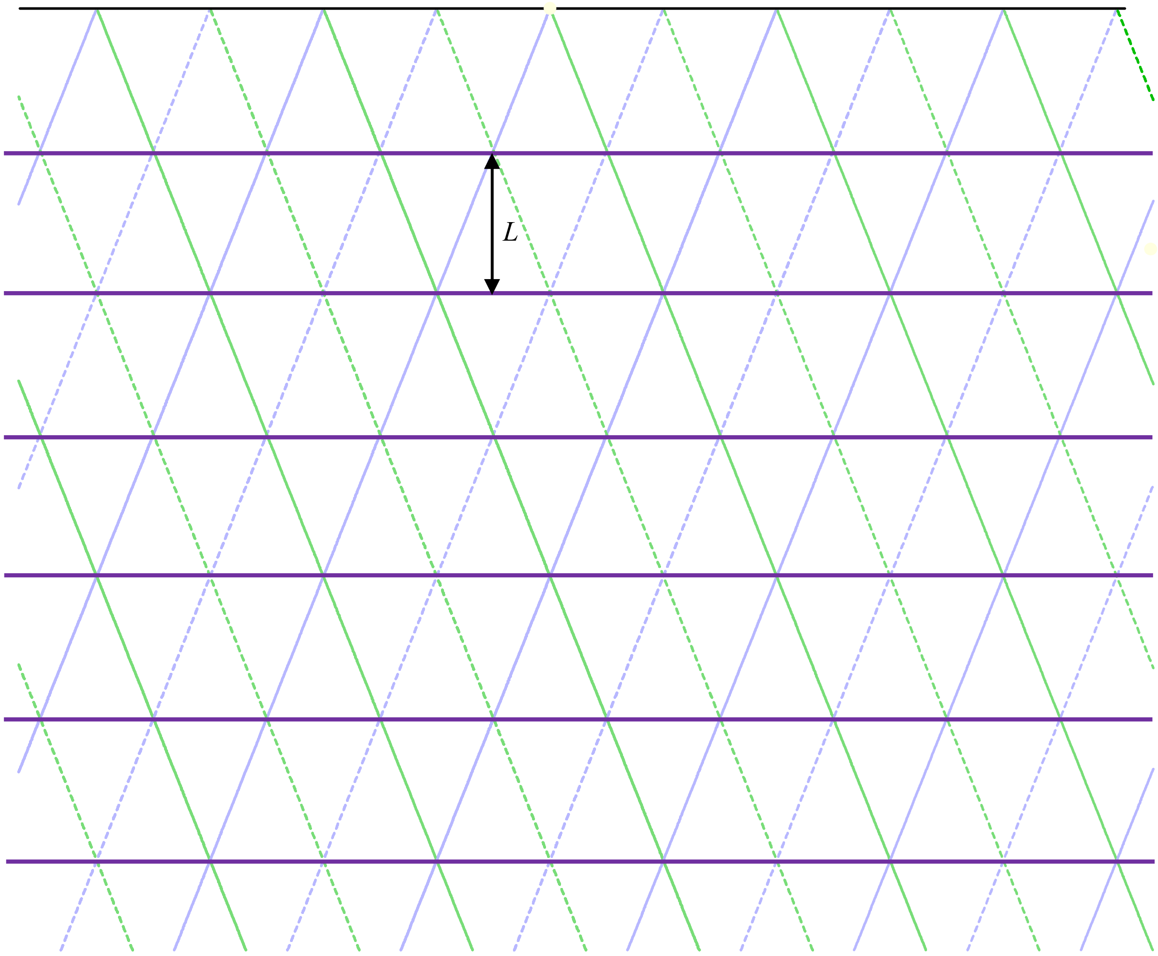
ある入射波の波面（谷）とある反射波の波面（山）が干渉してできた節を節 1 とする。



時刻 $t=T$ になると，それぞれの波面の変位が射線方向に λ_A 移動し，節 2 ができる。



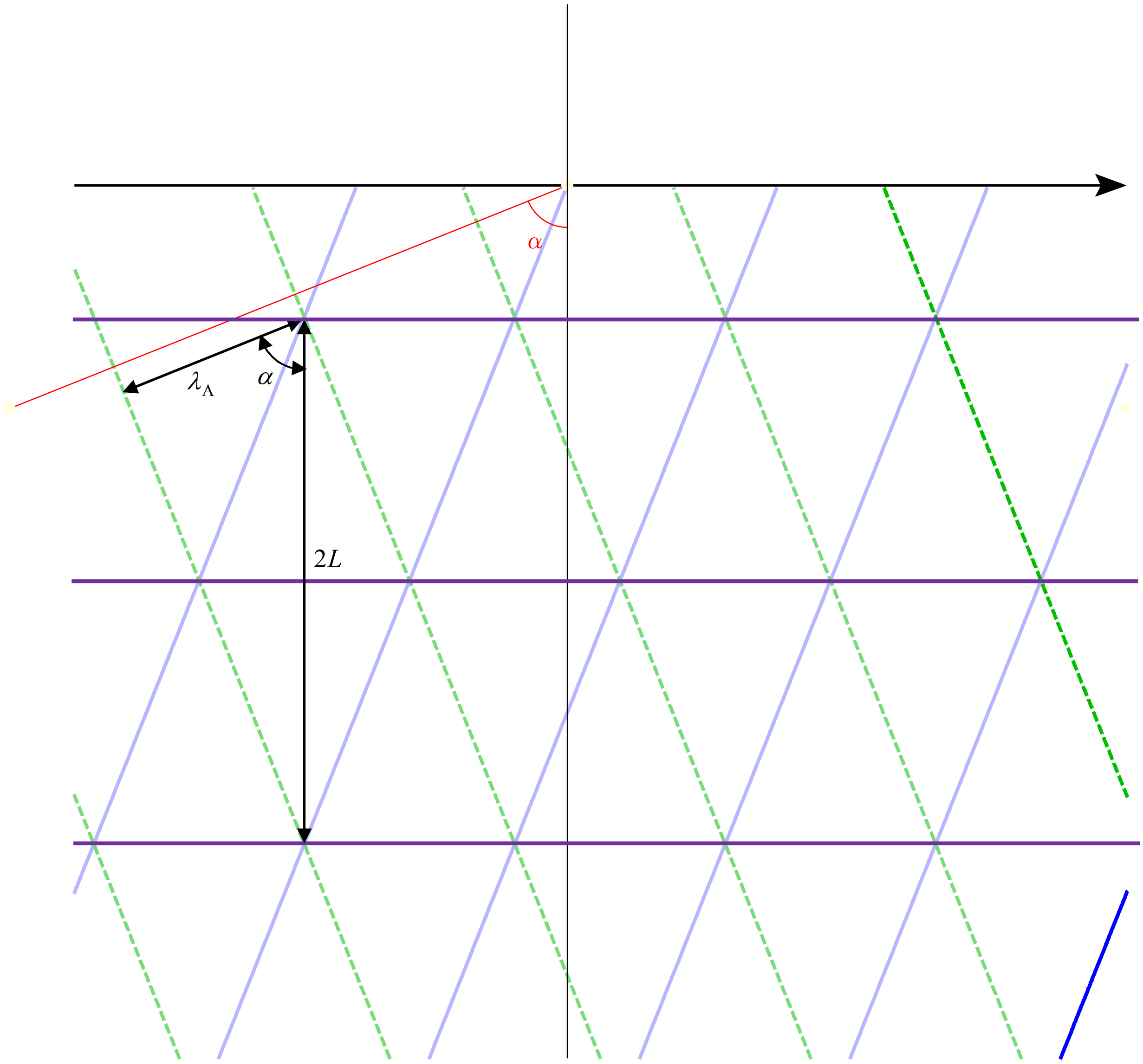
同様にして，任意の山の波面と谷の波面が移動し，生成する節を結ぶと，
次のような節線が出来上がる。
そこで，次に，節線の間隔 L を求める。



下図より， $2L\cos\alpha=\lambda_{\mathrm{A}}$ $\quad\therefore L=\dfrac{\lambda_{\mathrm{A}}}{2\cos\alpha}$

これと， $\lambda_{\mathrm{A}}=v_{\mathrm{A}}T$ より，

$L=\dfrac{v_{\mathrm{A}}T}{2\cos\alpha}$ ・・・(答)



(7)

反射波の置き換え

境界面 I での反射波は，あたかも波源 S と境界面 I に関して対称な仮想の波源 S’からの波であるかのように観察されるから，入射波と反射波の干渉を波源 S からの波と仮想の波源 S’からの波の領域 A における干渉に置き換えることができる。

波源 S と仮想の波源 S’の位相差

自由端反射だから，波源 S と波源 S' を結ぶ線の中点は定常波の腹になる。

よって，波源 S’から出る波は波源 S から出る波と同位相である。

節線の数

波源 S と境界面の距離 $d = v_{\mathrm{A}}T = \lambda_{\mathrm{A}}$，腹は境界面 I，$\left(0, -\dfrac{d}{2}\right)$ を通る曲線にできる。

よって，節線は $\left(0, -\dfrac{d}{4}\right)$ を通る曲線と $\left(0, -\dfrac{3}{4}d\right)$ を通る曲線になる。

曲線の形

節となる点を P とすると，

節線が $\left(0, -\dfrac{d}{4}\right)$ を通る曲線の場合

点 P は，$\mathrm{S'P} - \mathrm{SP} = \left\{d - \left(-\dfrac{d}{4}\right)\right\} - \left\{-\dfrac{d}{4} - (-d)\right\}$ より，

$\mathrm{S'P} - \mathrm{SP} = \dfrac{d}{2}\left(= \dfrac{1}{2}\lambda_{\mathrm{A}}\right)$ を満たす点である。

節線が $\left(0, -\dfrac{3}{4}d\right)$ を通る曲線の場合

点 P は，$\mathrm{S'P} - \mathrm{SP} = \left\{d - \left(-\dfrac{3}{4}d\right)\right\} - \left\{-\dfrac{3}{4}d - (-d)\right\}$ より，

$\mathrm{S'P} - \mathrm{SP} = \dfrac{3}{2}d\left(= \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\lambda_{\mathrm{A}}\right)$ を満たす点である。

つまり，点 P は定点 S と定点 S’からの距離の差が一定の点である。

よって，点 P の軌跡は双曲線になる。

双曲線の式

グラフの目盛り間隔を 1 とすると，点 S$(0,-2)$，点 S'$(0,2)$

節線が$\left(0,-\dfrac{d}{4}\right)$を通る双曲線は，節線が$\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$を通る双曲線となり，

$\mathrm{S'P}-\mathrm{SP}=\dfrac{d}{2}$ より，$\mathrm{S'P}-\mathrm{SP}=1$

節線が$\left(0,-\dfrac{3}{4}d\right)$を通る双曲線は，節線が$\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$を通る双曲線となり，

$\mathrm{S'P}-\mathrm{SP}=\dfrac{3}{2}d$ より，$\mathrm{S'P}-\mathrm{SP}=3$

また，点 P の座標を(x,y)とする。

節線が$\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$を通る双曲線

$\mathrm{S'P}-\mathrm{SP}=1$，$\mathrm{S'}(0,2)$，$\mathrm{S}(0,-2)$ より，

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}-\sqrt{x^2+(y+2)^2}=1$$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=1+\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

$$x^2+(y-2)^2=1+x^2+(y+2)^2+2\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

$$-8y-1=2\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

$$64y^2+16y+1=4x^2+4y^2+16y+16$$
$$4x^2-60y^2=-15$$

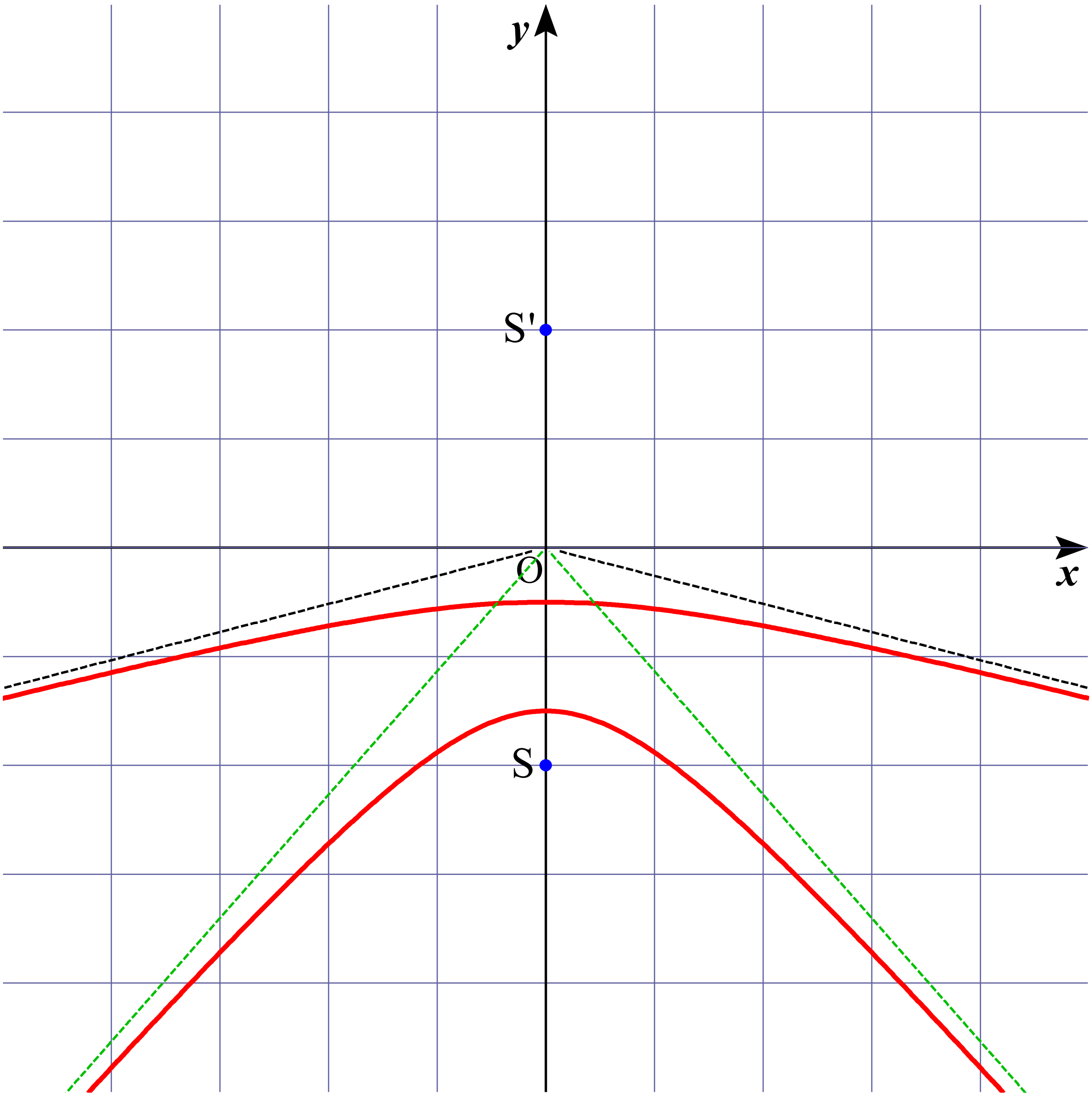
$$\therefore \frac{x^2}{\frac{15}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=-1\ (y\le 0)$$，漸近線 $y=\pm\dfrac{x}{\sqrt{15}}\ (y\le 0)$

節線が$\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$を通る双曲線

$\sqrt{x^2+(y-2)^2}-\sqrt{x^2+(y+2)^2}=3$ より，

$$\frac{x^2}{\frac{7}{4}}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=-1\ (y\le 0)$$，漸近線 $y=\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}x\ (y\le 0)$

破線は漸近線



実線の波面は山（谷），破線の波面は谷（山）